República de Colombia
Ministerio de Educación Nacional

Institución Educativa Nacional Agustín Codazzi

PLAN DE TRABAJO: Atendiendo las orientaciones de la Circular 0057 de la SED, por suspensión de clase, para el manejo, control y prevención del COVID-19.

Área: Matemática Asignatura:Trigonometría Guia: 2 Inecuaciones Cuadráticas Grado: 11
Docente: ________________________________ Jornada: ________________ Periodo: __________
Tiempo: 4 Horas Metodología ______________________________________

INECUACIONES CUADRÁTICAS

Las **inecuaciones cuadráticas** son expresiones de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ y $ax^2 + bx + c \geq 0$, en todos los casos $a \neq 0$.

Para resolver una inecuación cuadrática se aplican las propiedades de las desigualdades de tal forma que uno de los miembros de la inecuación sea cero y el otro sea la expresión cuadrática. Luego, se factoriza, si es posible, la expresión cuadrática y se resuelven las inecuaciones lineales correspondientes para determinar el conjunto solución.

Si la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente, entonces, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se expresa la inecuación como una ecuación cuadrática.
- **Luego,** se aplica la fórmula cuadrática para hallar la solución de la ecuación.
- **Finalmente,** se ubican las soluciones de la ecuación en la recta numérica y se toman los valores de cada intervalo para verificar si son solución de la inecuación. Si los valores que se toman de cada intervalo son solución de la inecuación, entonces, el intervalo hace parte del conjunto solución.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 - 3x - 18 \geq 0$

Primero, se factoriza la expresión cuadrática.

$$(x - 6)(x + 3) \geq 0$$

Segundo, para que la multiplicación sea mayor que cero se puede presentar alguno de los siguientes casos:

Caso 1

$$x - 6 \geq 0 \wedge x + 3 \geq 0$$

Caso 2

$$x - 6 \leq 0 \wedge x + 3 \leq 0$$

Tercero, se resuelve cada inecuación lineal en ambos casos.

Caso 1

$$x \geq 6 \wedge x \geq -3$$

Caso 2

$$x \leq 6 \wedge x \leq -3$$

Luego, se obtienen los intervalos solución por cada caso, teniendo en cuenta que el conectivo lógico $\wedge$ implica la intersección entre intervalos.

Caso 1

$$[6, \infty) \cap [-3, \infty)$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $[6, \infty)$.

Caso 2

$$(-\infty, 6] \cap (-\infty, -3]$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $(-\infty, -3]$.

Finalmente, se tiene que la solución de la inecuación cuadrática es la unión de los intervalos solución en cada caso. Por tanto, el conjunto solución es:

$$(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$$

Las inecuaciones de segundo grado también se pueden resolver utilizando la factorización y empleando las proposiciones matemáticas:

$$① \quad m \cdot n < 0 \iff m > 0 \wedge n < 0 \quad \vee \quad m < 0 \wedge n > 0$$

$$② \quad m \cdot n > 0 \iff m > 0 \wedge n > 0 \quad \vee \quad m < 0 \wedge n < 0$$

Ejemplo 19

Determinamos el conjunto solución de $x^2 + x - 12 < 0$.

- Factorizamos $x^2 + x - 12 < 0$: $\quad (x + 4)(x - 3) < 0$
- Aplicamos la proposición matemática ① y resolvemos:

$$\underbrace{(x+4)}_{m}\underbrace{(x-3)}_{n} < 0 \iff (x+4) > 0 \wedge (x-3) < 0 \quad \vee \quad (x+4) < 0 \wedge (x-3) > 0$$

$$x > -4 \wedge x < 3 \quad \vee \quad x < -4 \wedge x > 3$$

$$]-4; +\infty[\; \cap \;]-\infty; 3[\quad \cup \quad]-\infty; -4[\; \cap \;]3; +\infty[$$

$$]-4; 3[\quad \cup \quad \varnothing$$

c.s. = $]-4; 3[$

Ejemplo 20

Verificamos, empleando la factorización, que el conjunto solución de $2x^2 - 6x - 8 < 0$ es $]-1; 4[$.

$$2x^2 - 6x - 8 < 0 \rightarrow 2(x^2 - 3x - 4) < 0 \leftarrow \text{Factor común}$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x + 1)(x - 4) < 0 \leftarrow \text{Aspa simple}$$

$$(x+1) > 0 \wedge (x-4) < 0 \quad \vee \quad (x+1) < 0 \wedge (x-4) > 0 \leftarrow \text{Prop. mat. ①}$$

$$x > -1 \wedge x < 4 \quad \vee \quad x < -1 \wedge x > 4$$

$$]-1; +\infty[\cap]-\infty; 4[\quad \cup \quad]-\infty; -1[\cap]4; +\infty[$$

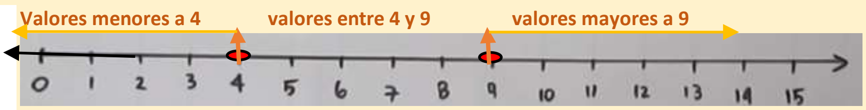
$$]-1; 4[\quad \cup \quad \varnothing$$

c.s. = $]-1; 4[$

SOLUCIÓN DE INECUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

Resolver la inecuación $x^2 - 13x + 36 \leq 0$

1. Se Factoriza la expresión : $(x-4)(x-9) \leq 0$
2. Se hallan los puntos críticos, haciendo a cada igual a cero, así:
   $x - 4 = 0 \quad ; x - 9 = 0$
   Entonces
   $x = 4 \quad ; \quad x = 9$
3. Se ubican los puntos críticos en la recta numérica y se le dan valores reales



Primero se dan valores a la izquierda del punto crítico menor y se observa el signo (+ o -)
Segundo se dan valores que estén entre los puntos crítico y se observa el signo (+ o -)
Tercero sedan valores a la derecha del punto crítico mayor y se observa el signo (+ o -)

Un valor menor que $x = 4$ *es* $x = 3$

$x^2 - 13x + 36\ reemplazamos\ x\ por\ 3\ se\ tiene: 3^2 - 13(3) + 36 = 6(+) = 6$

$6\ es\ positivo. Para\ todos\ los\ valores\ menores\ que\ \ 4\ \ el\ resultado\ en\ el\ signo\ es\ positivo$

Damos ahora un valor entre los puntos críticos, es decir entre 4 y 9, digamos X=5

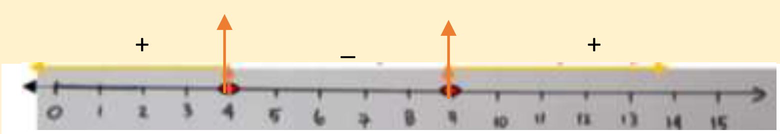
$x^2 - 13x + 36\ reemplazamos\ x\ por\ 5\ se\ tiene: 5^2 - 13(5) + 36 = -4(-). -4\ es\ negativo$

$-4\ es\ negativo. Ppara\ todos\ los\ valores\ entre\ 4\ y\ 9\ \ el\ resultado\ en\ el\ signo\ es\ negativo$

Un valor mayor que $x = 9$ *es* $x = 10$

$x^2 - 13x + 36\ reemplazamos\ x\ por\ 10\ se\ tiene: 10^2 - 13(10) + 36 = 6$

$6\ es\ positivo. Para\ todos\ los\ valores\ mayores\ que\ \ 9\ \ el\ resultado\ en\ el\ signo\ es\ positivo$



$(-\infty, 4]$ $\quad [4,9] \quad$ $(9, \infty)$

Para la solución de la inecuación cuadrática se tiene en cuenta lo siguiente:

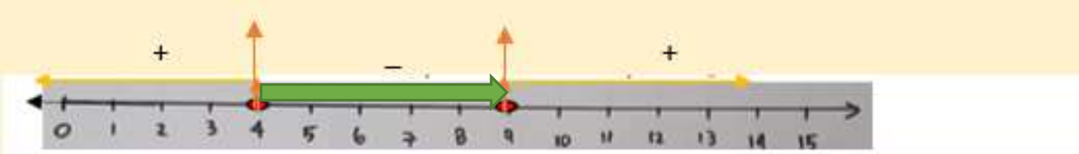
$Si\ P(X) es\ > o\ \geq se\ toma\ como\ solución\ las\ regiones\ positivas$

$Si\ P(X) es\ < o\ \leq se\ toma\ como\ solución\ las\ regiones\ negativas$

En nuestro caso la inecuación es $x^2 - 13x + 36 \leq 0$, $P(X) \leq 0$, se toma como solución la región negativa, así la solución de la inecuación e:

$$S = [4,9]$$

Solución es la parte sombre



$(-\infty, 4]$ $\quad [4,9] \quad$ $(9, \infty)$

ACTIVIDAD DE AFIANZAMIENTO

Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 < 0$
3. $12x^2 > 27x + 27$
4. $9x > 2x^2 - 18$
5. $x^2 - 5x \leq 0$
6. $3x^2 - 27 \geq 0$
7. $x^2 + 6x \leq -9$
8. $4x^2 + 7x \leq 0$