1.3 Proposiciones con cuantificadores

Para formar proposiciones se utilizan las funciones proposicionales y los cuantificadores.

Funciones proposicionales

Una **función proposicional** es una expresión que tiene una o más variables que, al ser sustituidas por los elementos de un conjunto de referencia, dan origen a una proposición.

Las funciones proposicionales se representan con letras mayúsculas (P, Q, R, S) en función de las variables correspondientes. Por ejemplo, la función proposicional "x es menor que 5" se puede representar como $P(x)$: $x < 5$, en donde x se puede remplazar por valores de cualquier conjunto numérico para formar una proposición.

Matemáticamente

¿Cuál es la diferencia entre una función proposicional y una proposición?

Cuantificadores

Ampliación multimedia

Un **cuantificador** es una expresión que indica la cantidad de elementos que cumplen una proposición.

Los principales cuantificadores son el cuantificador universal "para todo" que se simboliza $\forall$ y el cuantificador existencial "existe algún" que se simboliza $\exists$.

Para negar una proposición con cuantificador universal se utiliza el cuantificador existencial y para negar una proposición con cuantificador existencial se utiliza el cuantificador universal.

Negación cuantificador universal $\neg(\forall\, x \in A: P(x)) \leftrightarrow \exists\, x \in A: \neg P(x)$

Negación cuantificador existencial $\neg(\exists\, x \in A: P(x)) \leftrightarrow \forall\, x \in A: \neg P(x)$

Recuerda que...

Los cuantificadores se utilizan para convertir una función proposicional en una proposición.

EJEMPLOS

1. Convertir la función proposicional $P(x)$ en una proposición anteponiendo un cuantificador. Luego, determinar su valor de verdad.

$$P(x): x^2 + 2 \leq 20$$

Primero, se convierte la función proposicional $P(x)$ a proposición. Para esto, se puede anteponer el cuantificador "para todo" así:

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2 \leq 20$$

Luego, se determina el valor de verdad de la proposición. En este caso, la proposición es falsa, porque para $x = 5$ se tiene que:

$$(5)^2 + 2 = 27 \text{ y } 27 > 20.$$

Finalmente, se tiene que, al anteponer $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ a la función proposicional $P(x)$: $x^2 + 2 \leq 20$, se forma una proposición que es falsa, porque no todos los números x que pertenecen a los enteros cumplen que $x^2 + 2$ sea menor o igual que 20.

2. Simbolizar la proposición "Todos los números reales son racionales". Luego, escribir su negación.

Primero, se identifica la función proposicional y el conjunto de referencia.

$$P(x): x \text{ es racional.}$$

Conjunto referencia: $\mathbb{R}$

Segundo, se simboliza la proposición teniendo en cuenta que se utiliza el cuantificador "para todo":

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: P(x)$$

Luego, se plantea la negación aplicando el cuantificador existencial.

$$\neg(\forall\, x \in \mathbb{R}: P(x)) \leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \neg P(x)$$

Finalmente, se escribe la negación en lenguaje natural, así:

"Existe un número x que pertenece a los números reales tal que x no es racional".

3. Escoja la negación correcta de los siguientes enunciados:

a) A algunas personas le gustan las Matemáticas

1) A algunas personas no le gustan las Matemáticas
2) A todo el mundo le disgustan las Matemáticas
3) A todo el mundo le gustan las Matemáticas

Claramente el enunciado se formaliza $\exists x \ m(x)$, es decir, hay al menos una persona a la que le gustan las Matemáticas. Así pues, la negación es $\forall x \ \neg m(x)$ que se corresponde con el segundo enunciado.

b) A todo el mundo le gustan los helados

1) A nadie le gustan los helados
2) A todo el mundo le disgustan los helados
3) A alguna persona no le gustan los helados

La negación es el tercer enunciado

c) Todo el mundo es alto y delgado

1) Algunas personas son bajas y gordas
2) Nadie es alto y delgado
3) Hay alguna persona que es baja o gorda

Se trata de un enunciado del tipo $\forall x \ p(x) \wedge q(x)$, así que su negación será $\exists x \ \neg p(x) \vee \neg q(x)$, que se corresponde con la tercera opción.

d) Algunos cuadros están viejos o deteriorados

1) Todos los cuadros están nuevos y bien conservados
2) Algunos cuadros no son viejos o no están deteriorados
3) Todos los cuadros están nuevos o bien conservados

En este caso el enunciado se formaliza como $\exists x \ p(x) \vee q(x)$, luego la respuesta correcta es la primera que se corresponde con $\forall x \ \neg p(x) \wedge \neg q(x)$

4. Sea $p(x)$ la funcion proposicional $x^2 = 2x$, donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

a) $p(0)$

b) $p(1)$

c) $p(2)$

d) $p(-2)$

e) $\exists x p(x)$

f) $\forall x p(x)$

Puesto que la ecuación sólo tiene como soluciones a 0 y 2, son verdaderas (a), (c) y (e).