CONJUNTOS

2. Conjuntos

Un **conjunto** es una agrupación de objetos de cualquier especie. Cada objeto de un conjunto se denomina **elemento**. Los elementos de un conjunto no se repiten y no tienen un orden específico.

Los conjuntos se clasifican según sus elementos, así:

- **Finitos:** son aquellos que tienen un número determinado de elementos.
- **Infinitos:** son aquellos que tienen un número indeterminado de elementos.
- **Unitario:** son aquellos que tienen un solo elemento.
- **Vacío:** es aquel que no tiene elementos.
- **Universal:** es aquel cuyo objeto de estudio son sus subconjuntos.

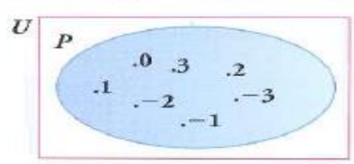
Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas y, en particular, el conjunto universal generalmente se nombra con la letra U. Además el conjunto vacío se simboliza $\varnothing$.

Hay dos formas de representar un conjunto: escribiendo sus elementos entre llaves separadas por comas o, gráficamente, por medio de diagramas de Venn, de tal forma que el conjunto universal se representa con un rectángulo y los conjuntos que están en su interior con círculos u óvalos en los que se encuentran sus elementos.

EJEMPLOS

1. **Representar el conjunto P cuyos elementos son los números enteros mayores o iguales a -3 y menores o iguales a 3.**

Las posibles representaciones del conjunto P son:

Entre llaves	En diagramas de Venn
$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	

Existen varios posibles conjuntos universales U. En este caso, el conjunto universal puede ser el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ o el conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$, entre otros.

2. **Clasificar los siguientes conjuntos en finito, infinito, vacío o unitario.**

a. **El conjunto de los números reales.**

El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito, porque tiene un número indeterminado de elementos.

b. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

El conjunto A es finito, porque tiene un número determinado de elementos, es decir, 5.

c. **El conjunto M formado por los números primos pares.**

El conjunto M es unitario, porque 2 es el único número primo que es par.

2.1 Determinación de un conjunto

Enlace web

Un conjunto se puede determinar de dos formas: por extensión y por comprensión.

Un conjunto se determina por **extensión** cuando se nombran sus elementos o una parte de ellos.

Un conjunto se determina por **comprensión** cuando se da una regla o propiedad característica de los elementos que conforman el conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ está determinado por extensión. Este mismo conjunto se determina por comprensión como $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$.

EJEMPLOS

1. Determinar por extensión los siguientes conjuntos.

a. $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \leqslant x \leqslant 8\}$

El conjunto A es el conjunto formado por los números enteros x que son mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 8. Por tanto, el conjunto A se determina por extensión así:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} / x > 8 \wedge x < 6\}$

El conjunto S es vacío, porque no hay ningún número que sea mayor que 8 y menor que 6. Por tanto, se escribe que $S = \varnothing$.

2. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos.

a. $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$

Los elementos del conjunto B son potencias de 2. Por tanto, al determinarlo por comprensión se tiene que:

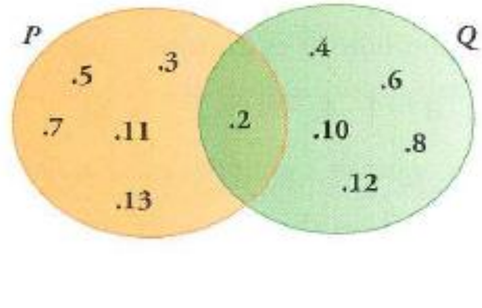
$$B = \{x / x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

b. $T = \{7\}$

El conjunto T es unitario. En este caso B se puede determinar por comprensión de varias formas. Por ejemplo:

$$T = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = 49\} \text{ y } T = \{x \in \mathbb{N} / 6 < x < 8\}$$

3. Observar los siguientes conjuntos. Luego, resolver.



a. Determinar por extensión el conjunto Q.

El conjunto Q se determina por extensión así:

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

b. Determinar por comprensión el conjunto P.

El conjunto P se determina por comprensión así:

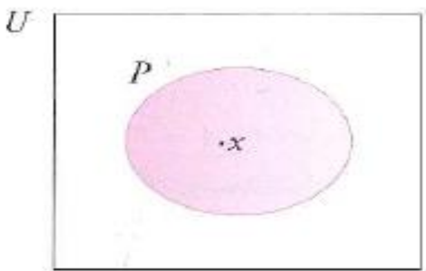
$$P = \{x / x \text{ es primo} \wedge x \leqslant 13\}$$

2.2 Relación de pertenencia

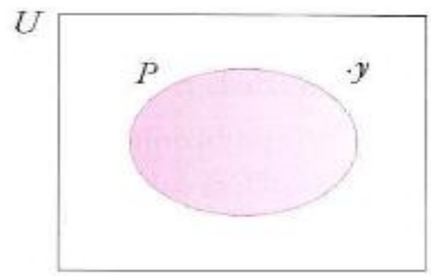
La relación entre un elemento y un conjunto dado se denomina relación de pertenencia.

Un elemento pertenece a un conjunto si cumple con las características que definen al conjunto. Los símbolos que se utilizan para indicar si un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto son $\in$ y $\notin$, respectivamente.

Por ejemplo, si un elemento x cumple con las características de un conjunto P se escribe $x \in P$ y se lee "x pertenece a P". De manera similar, si un elemento y no cumple con las características que definen a P, entonces, se escribe $y \notin P$ y se lee "y no pertenece a P". Estas relaciones de pertenencia se pueden representar en diagramas de Venn así:



$x \in P$



$y \notin P$

EJEMPLOS

1. **Determinar por comprensión el conjunto $A = \{9, 14, 19, 24, \ldots\}$. Luego, establecer si el número 169 pertenece o no pertenece a A.**

Primero, se tiene que los elementos del conjunto A se generan a partir de igualdades como las siguientes:

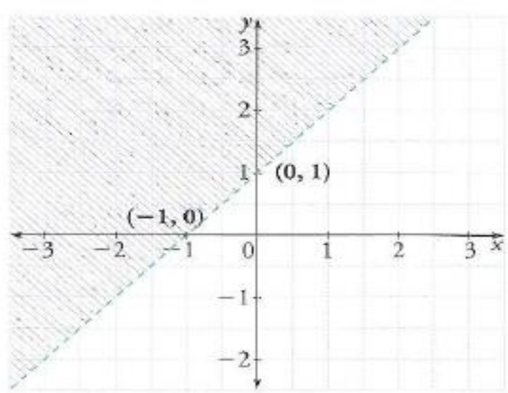
$$5(0) + 9 = 9 \qquad 5(1) + 9 = 14 \qquad 5(2) + 9 = 19$$

Luego, cada elemento del conjunto A es igual a 9 más un múltiplo de 5. Por esto, el conjunto A se determina por comprensión así:

$$A = \{y \,/\, y = 5n + 9 \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

Finalmente, si $n = 32$, entonces, $5(32) + 9 = 169$, de donde se concluye que $169 \in A$.

2. **Determinar por comprensión el conjunto S de puntos (x, y) del plano cartesiano que pertenecen a la región sombreada:**



Primero, se calcula la pendiente m, de la recta.

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Luego, la ecuación de la recta es:

$$y - 1 = 1\,(x - 0)$$
$$y = x + 1$$

Finalmente, como los puntos de la región sombreada están "por encima" de la recta, entonces, el conjunto S se determina así:

$$S = \{(x, y) \,/\, y > x + 1\}$$

Recuerda que...

Si $P\,(x_1, y_1)$ es un punto de una recta y m es su pendiente, entonces, la ecuación de la recta está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2.3 Relaciones entre conjuntos

Entre dos o más conjuntos se puede presentar una relación de inclusión y una relación de igualdad.

Relación de inclusión

Actividad

Un conjunto A está contenido o incluido en un conjunto B si todos los elementos que pertenecen a A también pertenecen a B. Esto se escribe $A \subseteq B$ y se lee "A es subconjunto de B". En forma simbólica la relación de inclusión se puede expresar como:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$$

Cuando un conjunto A no es subconjunto de un conjunto B, entonces, se escribe $A \subsetneq B$.

Algunas propiedades de la relación de inclusión son:

- Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo, es decir, $A \subseteq A$.
- El conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de todos los conjuntos, es decir, $\varnothing \subseteq A$.

Relación de igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A, es decir, si ambos conjuntos tienen los mismos elementos. En forma simbólica, la relación de igualdad se puede expresar como:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Y de acuerdo con la relación de inclusión se tiene que:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \rightarrow x \in A)$$

Algunas propiedades de la relación de igualdad son:

- Todo conjunto A es igual a sí mismo, es decir, $A = A$.
- Si $A = B$, entonces, $B = A$.
- Si A, B, C son conjuntos tales que $A = B$ y $B = C$, entonces, $A = C$.

EJEMPLO

Determinar las posibles relaciones entre los siguientes conjuntos.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 4\}$

$B = \{x \mid x^2 + 8x + 15 = 0\}$

$C = \{-5, -3, 0, 3, 4\}$

Primero, se resuelve la ecuación que aparece en el conjunto B para hallar sus elementos.

$x^2 + 8x + 15 = 0$	Ecuación.
$(x + 3)(x + 5) = 0$	Se factoriza.
$x + 3 = 0$ o $x + 5 = 0$	Se iguala a cero.
$x = -3$ o $x = -5$	Se despeja x.

Por tanto, el conjunto B se determina por extensión así:

$$B = \{-3, -5\}$$

Segundo, como todos los elementos de B, es decir, -3 y -5, pertenecen al conjunto A, entonces, B es subconjunto de A y se escribe:

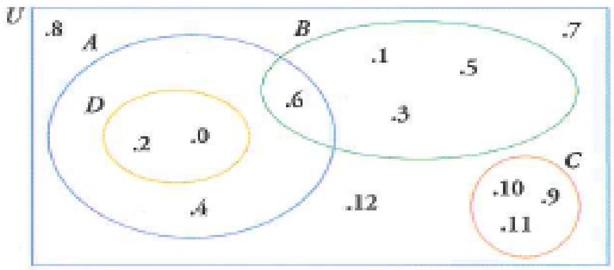
$$B \subseteq A$$

Luego, como cada elemento de B pertenece a C, entonces, B también es subconjunto de C y se escribe:

$$B \subseteq C$$

Finalmente, se tiene que todos los elementos de C son mayores que -6 y menores o iguales a 4, de donde se deduce que C es subconjunto de A y se escribe: $C \subseteq A$.

Observa el siguiente diagrama de Venn. Luego, completa cada espacio con los símbolos $\in$, $\notin$, $\subseteq$ o $\not\subseteq$.



69. B ____ A
70. -2 ____ D
71. 11 ____ C
72. D ____ A

Determina por extensión los siguientes conjuntos.

73. $R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 4 \leq x \leq 20\}$
74. $T = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 - 2x - 3 = 0\}$
75. $J = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x^2 = 169\}$
76. $L = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 - 5x - 6 = 0\}$
77. $H = \left\{x \,/\, x = \frac{1}{2^n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$

Determina por comprensión los siguientes conjuntos.

78. $F = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, \ldots\}$
79. $G = \{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$
80. $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$
81. $N = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots\right\}$
82. $P = \{\sqrt{6}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[6]{18}, \sqrt[8]{24}, \ldots\}$

Representa en diagramas de Venn las siguientes relaciones entre conjuntos.

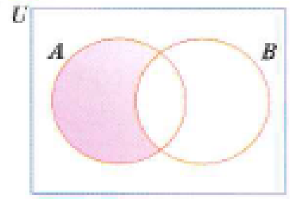
83. $A \subseteq B \wedge C \subseteq A$
84. $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, $C \subseteq S$. Además, A tiene elementos comunes con B y C no tiene elementos comunes con A ni con B.

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

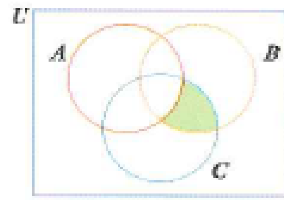
85. $\varnothing \in \varnothing$
86. $\varnothing \subseteq \{0\}$
87. $\varnothing \subseteq \varnothing$
88. $0 \in \varnothing$

Determina por comprensión el conjunto de los elementos que pertenecen a la región sombreada en los siguientes diagramas de Venn.

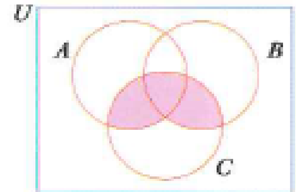
89.



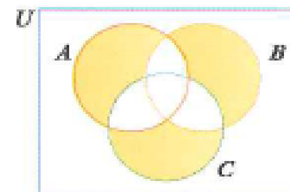
90.



91.



92.



Lee y resuelve.

El conjunto de partes es el conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto determinado. Por ejemplo, el conjunto de partes de $H = \{0, 1\}$ es:

$$P(H) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

93. Escribe el conjunto de partes del conjunto $M = \{a, b, c\}$.
94. Determina cuántos elementos tiene el conjunto de partes de un conjunto que tiene n elementos.

Si $A = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{1\}, 1, \{2\}\}$, escribe V, si es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

95. $2 \subseteq A$ ____
96. $\{2\} \in A$ ____
97. $\varnothing \subseteq A$ ____
98. $\{1, 2\} \subseteq A$ ____
99. $1 \in A$ ____
100. $\{1\} \in A$ ____

Indica si cada pareja de conjuntos son iguales o no son iguales.

101. $J = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 2\}$
$L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$
102. $R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 3 < x < 10\}$
$S = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
103. $M = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 1\}$
$N = \varnothing$